量子力学演習問題 4 略解

調和振動子, 時間発展

(1) 1 次元調和振動子

(a)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

(b)

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = -\frac{i}{2\hbar}[\hat{x}, \hat{p}] + \frac{i}{2\hbar}[\hat{p}, \hat{x}] = 1$$

(c)

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(a^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

(d)

$$\hat{n}\hat{a}|n\rangle = a^\dagger\hat{a}\hat{a}|n\rangle = (\hat{a}a^\dagger - 1)\hat{a}|n\rangle = \hat{a}(\hat{n} - 1)|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle$$

よって $\hat{a}|n\rangle$ は固有値 $n-1$ に属する固有ベクトル $|n-1\rangle$ に比例する。比例定数は　$\hat{a}|n\rangle = c_n|n-1\rangle$ とおくと $||\hat{a}|n\rangle||^2 = |c_n|^2 = n$ より $c_n = \sqrt{n}$.

(e) ハミルトニアンは (c) のように書けることと, $a^\dagger\hat{a}$ の固有値は 0 以上の整数であることより

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

(f)

$$\hat{a}|0\rangle = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right)|0\rangle = 0$$

は座標表示で

$$\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dx}\right)\phi_0(x) = 0$$

この微分方程式を解くと規格化された解は

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

(2) シュレディンガー描像では状態ベクトルが時間発展する。ハイゼンベルク描像では演算子が時間発展する。

(3) 運動量演算子に関するハイゼンベルクの運動方程式は

$$\frac{d\hat{p}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}_H, \hat{H}] = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}_H, \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_H^2] = -m\omega^2\hat{x}_H$$

これはニュートンの運動方程式 $\dot{p} = -m\omega^2 x$ と同じ形。