量子力学演習問題３略解

１次元空間中の粒子の運動

(1) 運動量演算子 $\hat{p}$ は $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ と表される。$[\hat{x},\hat{p}]|\psi\rangle$ をこの表示で表すと

$$\left(x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}x\right)\psi(x)=\frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial x}-1-x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)=i\hbar\psi(x)$$

よって正準交換関係が成り立つ。

(2)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+V(x)\psi(x,t)$$

(3) エネルギー固有値は $E_k=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$, 固有関数は $\phi_k(x)=e^{ikx}$.

(4) エネルギー固有値

$$E_n=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

ただし $n=1,2,3,\cdots$. 固有関数は

$$\phi_n(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{n\pi}{a}x & (n=1,3,5,\cdots)\\ \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases}$$

(5)

$$\langle\hat{x}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)x\psi(x)dx=0,\quad \langle\hat{p}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)\psi(x)dx=\hbar k$$

$$\langle\hat{x}^2\rangle=\frac{\ell^2}{2}\quad \langle\hat{p}^2\rangle=(\hbar k)^2+\frac{\hbar^2}{2\ell^2}$$

$$\langle(\Delta x)^2\rangle=\langle\hat{x}^2\rangle-\langle\hat{x}\rangle^2=\frac{\ell^2}{2}\quad \langle(\Delta p)^2\rangle=\langle\hat{p}^2\rangle-\langle\hat{p}\rangle^2=\frac{\hbar^2}{2\ell^2}$$

$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle=\hbar^2/4$ は不確定性関係 $\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle\geq\hbar^2/4$ を満たす。

(6)

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho=\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi$$

右辺にシュレディンガー方程式を代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho=-\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\psi\right)=-\frac{\hbar}{2mi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right)=-\frac{\partial j}{\partial x}$$

(7) 量子力学において粒子が、古典力学では越えられない障壁を、ある確率で通り抜けること。