量子力学演習問題 2 略解

量子論の定式化 2

(1) 物理量 $\hat{A}$ を測定したとき、測定値 a が得られる確率

(2)

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

とする。

$$P(\pm 1) = |\langle\pm|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}|\xi \mp i\eta|^2 = \frac{1}{2}(|\xi|^2 + |\eta|^2 \mp i\xi^*\eta \pm i\xi\eta^*) = \frac{1}{2}(1 \mp i\xi^*\eta \pm i\xi\eta^*)$$

(3)

$$\langle\hat{\sigma}_y\rangle = \langle\psi|\hat{\sigma}_y|\psi\rangle = (\xi^*, \eta^*)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = -i\xi^*\eta + i\xi\eta^*$$

(4)

$$\begin{aligned}
&|\langle a|\psi\rangle|^2 = |c_1\langle a|\psi_1\rangle + c_2\langle a|\psi_2\rangle|^2 \\
&= |c_1|^2|\langle a|\psi_1\rangle|^2 + |c_2|^2|\langle a|\psi_2\rangle|^2 + c_1^*c_2\langle a|\psi_1\rangle^*\langle a|\psi_2\rangle + c_1c_2^*\langle a|\psi_1\rangle\langle a|\psi_2\rangle^*
\end{aligned}$$

干渉を表す項は

$$c_1^*c_2\langle a|\psi_1\rangle^*\langle a|\psi_2\rangle + c_1c_2^*\langle a|\psi_1\rangle\langle a|\psi_2\rangle^*$$

(5)

$$\langle\hat{\sigma}_y\rangle = (\xi^*, \eta^*)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = -i\xi^*\eta + i\xi\eta^*$$

$$\langle\hat{\sigma}_y^2\rangle = (\xi^*, \eta^*)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = |\xi|^2 + |\eta|^2 = 1$$

$$\langle(\Delta\hat{\sigma}_y)^2\rangle = \langle\hat{\sigma}_y^2\rangle - \langle\hat{\sigma}_y\rangle^2 = 1 + (\xi^*\eta - \xi\eta^*)^2$$

(6) 物理量 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ を 同時に確定させることができる。

(7) 位置と運動量それぞれのゆらぎの間には

$$\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

という不確定性関係が成り立つ。一方がより正確に決まると、他方はより不確定になる。

(8) 状態ベクトル $|\psi\rangle$ の時間発展を記述する方程式であり

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

と書かれる。ここで $\hat{H}$ はハミルトニアンをあらわす。

(9) エネルギー固有値は $E_1 = -\varepsilon$, $E_2 = \varepsilon$. それぞれの固有値に属するエネルギー固有状態は

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

時刻 t の状態は

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\varepsilon t/\hbar}\psi(1)|1\rangle + e^{-i\varepsilon t/\hbar}\psi(2)|2\rangle$$