量子力学演習問題 1 略解

量子論の定式化 1

(1)

$$|\hat{\sigma}_y - a\hat{I}| = \begin{vmatrix} -a & -i \\ i & -a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = 0$$

よって固有値は $a = \pm 1$.
$a = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

より $\eta = i\xi$ なので $a = 1$ に属する規格化された固有ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

同様にして $a = -1$ に属する規格化された固有ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

(2) $\hat{A}$ を自己共役演算子とする。$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$ の両辺と $|a\rangle$ の内積をとると

$$\langle a|\hat{A}|a\rangle = a\langle a|a\rangle$$

両辺の複素共役をとると $\langle a|\hat{A}|a\rangle^* = a^*\langle a|a\rangle$ だが、この左辺は $\langle a|\hat{A}|a\rangle^* = \langle a|\hat{A}^\dagger|a\rangle = \langle a|\hat{A}|a\rangle$ なので上式左辺と同じ。よって $a = a^*$.

(3) $\hat{A}|a'\rangle = a'|a'\rangle$ の両辺と $|a\rangle$ の内積をとると

$$\langle a|\hat{A}|a'\rangle = a'\langle a|a'\rangle$$

この左辺は $\langle a|\hat{A}|a'\rangle = \langle \hat{A}^\dagger a|a'\rangle = \langle \hat{A}a|a'\rangle = a^*\langle a|a'\rangle = a\langle a|a'\rangle$. よって $(a - a')\langle a|a'\rangle$. よって $a \neq a'$ なら $\langle a|a'\rangle = 0$.

(4)

$$|\hat{A} - \lambda\hat{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) = 0$$

より固有値は $\lambda = 1, -1$ （1 は重根）。$\lambda = -1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

より $\xi = -\eta, \zeta = 0$ となるので規格化された固有ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right)$$

同様に $\lambda = 1$ のときは $\xi = \eta$ となるので、二つの互いに直行する固有ベクトルは、例えば

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$$

(5)

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c} 1 \\ \pm i \end{array}\right)$$

とする。$|\psi\rangle = \left(\begin{array}{c} \xi \\ \eta \end{array}\right)$ を基底 $|+\rangle, |-\rangle$ で表示した波動関数は

$$\psi(\pm 1) = \langle \pm|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \mp i)\left(\begin{array}{c} \xi \\ \eta \end{array}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi \mp i\eta)$$

(6)

$$|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} 1 \\ i \end{array}\right)(1, -i) + \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} 1 \\ -i \end{array}\right)(1, i) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} 1 \\ i \end{array}\right)(1, -i) - \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} 1 \\ -i \end{array}\right)(1, i) = \left(\begin{array}{cc} 0 & -i \\ i & 0 \end{array}\right) = \hat{\sigma}_y$$